29.D Sujets d'oraux blancs

Exercice 1:

Toutes les questions sont indépendantes, le candidat les traitera dans l'ordre de son choix

1. Énoncer la caractérisation de l'adhérence par les suites.
2. On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui sont diagonalisables. Montrer que $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
3. Si N suit une loi de Poisson de paramètre λ et les X_i suivent des lois de Bernoulli de paramètre p, montrer que $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$ qui suit une loi de Poisson de paramètre $p\lambda$.

Exercice 2:

Toutes les questions sont indépendantes, le candidat les traitera dans l'ordre de son choix

1. Énoncer l'inégalité des accroissements finis
2. Montrer la convergence et donner la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(3t) - \arctan(2t)}{t}\, \mathrm{d}t.$$

3. Montrer qu'un anneau commutatif qui n'a que deux idéaux est un corps

Exercice 3:

Toutes les questions sont indépendantes, le candidat les traitera dans l'ordre de son choix

1. Énoncer la formule de Taylor avec reste intégrale.
2. Étudier les solutions au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = \left|x + \mathrm{e}^t\right|, \\ x(0) = -1, \\ \frac{dx}{dt}(0) = -1 \end{cases}$$

3. Soit E un espace euclidien de dimension n. Si $(x_1, \ldots, x_m)$ est une famille de E, on pose

$$G(x_1, \ldots, x_m) = (\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \le i,j \le m} = \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \cdots & \langle x_1, x_m \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_m, x_1 \rangle & \cdots & \langle x_m, x_m \rangle \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$$

la matrice de Gram de la famille $(x_1, \ldots, x_m)$. On note $|G(x_1, \ldots, x_m)|$ le déterminant de la matrice de Gram $G(x_1, \ldots, x_m)$.

(a) Montrer que $G(x_1, \ldots, x_m)$ est inversible si et seulement si la famille $(x_1, \ldots, x_m)$ est libre.

(b) Soit F un sous-espace vectoriel strict de E, et $(x_1, \ldots, x_m) \in F^m$. Soit $x \in F^\perp$. Montrer que

$$|G(x, x_1, \ldots, x_m)| = ||x||^2 |G(x_1, \ldots, x_m)|.$$

(c) En déduire que si $(x_1, \ldots, x_m)$ est une base de F, et $x \in E$, alors

$$d(x, F)^2 = \frac{|G(x, x_1, \ldots, x_m)|}{|G(x_1, \ldots, x_m)|}.$$

Exercice 4:

Toutes les questions sont indépendantes, le candidat les traitera dans l'ordre de son choix

1. Énoncer le critère spécial série alternées.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Calculer A^n pour tout entier naturel n.
3. Soit $(a_n)_n$ une suite de nombres réels strictement positifs qui décroît vers 0.
   Quelle est la nature de $\sum u_n$ où $u_n = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n}$?

Exercice 5:

Les questions numérotées de 1 à 3 sont indépendantes, le candidat les traitera dans l'ordre de son choix

1. Énoncer la caractérisation de la diagonalisabilité par les dimensions des sous-espaces propres
2. Calculer la différentielle du déterminant en I_n, puis en déduire la différentielle du déterminant en $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et enfin en $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. L'univers Ω est l'ensemble des permutations de $[\![1;n]\!]$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) que l'on munit de la tribu discrète et de la probabilité uniforme. Pour $k \in [\![1;n]\!]$, on définit une variable aléatoire X_k sur Ω en posant, pour tout σ élément de Ω,

$$X_k(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(k) = k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   (a) Identifier la loi de la variable X_k.
   (b) Soient $i, j \in [\![1;n]\!]$ distincts. Calculer $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$.
   (c) En déduire l'espérance et la variance de la variable N donnant le nombre de points fixes d'une permutation $\sigma \in \Omega$.

Exercice 6:

Toutes les questions sont indépendantes, le candidat les traitera dans l'ordre de son choix

1. Énoncer le théorème du rang
2. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ et soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application différentiable.
   Calculer la différentielle de $x \mapsto \langle f(x), f(x) \rangle$.
   En déduire la différentielle de $N = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$.
   Soit $g : E \backslash \{0\} \to E \backslash \{0\}$; $x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$. Montrer que g est différentiable et donner sa différentielle.
3. Déterminer les solutions de l'équation différentielle

$$(t^2 + t)y'' + (3t + 1)y' + y = 0. \tag{3}$$

   Existe-il des solutions globales à (3) ?

   (*Indication : On regardera d'abord les solutions développables en série entières puis on utilisera la méthode d'abaissement du degré*

Exercice 7:

Toutes les questions sont indépendantes, le candidat les traitera dans l'ordre de son choix

1. Donner l'inégalité de Cauchy-Schwarz
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x, y) = x^4 - \frac{1}{3}y^3 - xy^2 + 1$. Déterminer ses extrema et leur nature.
3. Déterminer à isomorphisme près tous les groupes d'ordre 4.

Exercice 8:

Toutes les questions sont indépendantes, le candidat les traitera dans l'ordre de son choix

1. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$.
2. Soit $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Déterminer M^{-1} si elle existe.
3. Donner un équivalent simple puis un équivalent à deux termes de u_n où : $\begin{cases} u_0 & \in & \mathbb{R}_+^* \\ u_{n+1} & = & \ln(1+u_n) \end{cases}$.

Exercice 9:

Toutes les questions sont indépendantes, le candidat les traitera dans l'ordre de son choix

1. Énoncer le lemme d'Abel pour les séries entières
2. On note $d(n)$ le nombre de diviseurs de $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} d(n)\mathrm{e}^{-n} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-p}}{1-\mathrm{e}^{-p}}.$$

3. On considère la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

   (a) Calculer le polynôme caractéristique de la matrice C.
   (b) Calculer le polynôme minimal de la matrice C. *(Indication : on pourra montrer que qu'il n'existe pas de polynôme annulateur de degré $< n$ non nul)*
   (c) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme cyclique soit diagonalisable.

Exercice 10:

Toutes les questions sont indépendantes, le candidat les traitera dans l'ordre de son choix

1. Énoncer le théorème de représentation des formes linéaires
2. Montrer que la fonction ζ de la variable s donnée par la formule

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

   est indéfiniment dérivable sur son domaine de définition.
3. Soit a un réel strictement positif.
   Calculer $f(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} e^{-ax^2} \, \mathrm{d}x$ en fonction de $f(0)$.

   (*Indication : on déterminera une équation différentielle vérifiée par f.*)

Exercice 11:

Toutes les questions sont indépendantes, le candidat les traitera dans l'ordre de son choix

1. Énoncer le théorème d'intégration terme à terme dans le cas positif
2. On note les éléments de $\mathbb{R}^3$ en colonne. Déterminer les éléments $\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\\ \psi\end{pmatrix}$ de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)$ tels que :
$$\begin{cases} 2\phi' &= \phi+\chi+2\psi \\ 2\chi' &= \phi+\chi-2\psi \\ 2\psi' &= -\phi+\chi+4\psi \end{cases}$$
3. En écrivant le développement en série entière de e, en déduire la convergence (et préciser la limite) de la suite de terme général :
$$u_n = n\sin(2\pi n!\mathrm{e}).$$

Exercice 12:

1. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois géométriques de paramètre respectif p et q. Quelle est la probabilité que la matrice $\begin{pmatrix}X & 1\\ 0 & Y\end{pmatrix}$ soit diagonalisable
2. Soient A et B deux matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{rg}(AB-BA)=1$. Calculer $(AB-BA)^2$.
3. Soit n un entier naturel impair. Soit $\phi:\mathbb{R}\to \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ une application dérivable.
Montrer que pour tout réel t on a $\phi'(t)\notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.